На правах рукописи

УДК 517.9

СУКАЧЕВА ТАМАРА ГЕННАДЬЕВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 2001

Работа выполнена на кафедре математического анализа Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор Г.А.Свиридюк.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор В.В.Дубровский,
доктор физико-математических наук, профессор А.И.Кожанов,
доктор физико-математических наук, профессор Ю.И.Сапронов.

Ведущая организация: Московский энергетический институт.

Защита состоится "20" ноября 2001 года в 14 часов на заседании Специализированного Совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, Новосибирск-90, ул.Пирогова, 2, аудитория 317 главного корпуса.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "16" октября 2001 года

Ученый секретарь
Специализированного Совета
доктор физико-математических наук,
профессор С.Г.Пятков

0723963-1

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, то есть линеен и непрерывен, оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, т.е. $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $F : \operatorname{dom} F \to \mathcal{F}$, вообще говоря, нелинейный и в дальнейшем будет уточнен; вектор-функция $f : \mathbb{R} \to \mathcal{F}$.

Диссертация посвящена исследованию однозначной разрешимости задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.1}$$

для *полулинейного неавтономного уравнения соболевского типа*

$$L\dot{u} = Mu + F(u) + f(t). \tag{0.2}$$

Уравнения вида (0.2) принято называть "соболевскими" или "типа Соболева", так как впервые начально-краевые задачи для линейных уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производных по времени, начал изучать С.Л.Соболев.

К задаче Коши (0.1) для уравнения (0.2) сводятся многие начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных, моделирующих различные реальные процессы. К таким моделям можно отнести уравнение Баренблатта — Желтова — Кочиной, описывающее фильтрацию жидкости в трещиновато-пористой среде; уравнение Буссинеска — Лява, моделирующее продольные волны в тонком упругом стержне с учетом поперечной инерции; уравнение, моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости; уравнение Хоффа, моделирующее динамику выпучивания двутавровой балки; системы уравнений Осколкова, моделирующие течение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта, а также задачу термоконвекции указанной жидкости и др. Поэтому одной из задач диссертации является рассмотрение указанных прикладных задач с точки зрения единой теории.

При построении такой теории приходится сталкиваться со следующей проблемой. Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, тогда уравнение (0.2) тривиально редуцируется к уравнению

$$\dot{u} = Tu + H(u) + h(t), \tag{0.3}$$

где $T = L^{-1}M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{U}$, $H(u) = L^{-1}F(u)$, $h(t) = L^{-1}f(t)$, или в более краткой записи

$$\dot{u} = A(u,t). \tag{0.3'}$$

Если в (0.3′) оператор $A(u,t) \in C^\infty(\mathcal{U}\times\mathbb{R};\mathcal{U})$, то однозначная локальная разрешимость задачи (0.1), (0.3) исследуется с помощью обобщения известной теоремы Коши, то есть в этом случае указанная задача имеет единственное решение $u = u(t) \in \mathcal{U}$ для всех t из некоторого интервала $(-t_0, t_0)$.

Если оператор T ограничен, то задачу (0.1), (0.3) можно исследовать методами теории полугрупп.

Действительно, поскольку ограниченный оператор T является генератором аналитической группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ разрешающих операторов уравнения

$$\dot{u} = Tu, \tag{0.4}$$

то задачу Коши (0.1) для уравнения (0.3) можно свести к интегральному уравнению

$$u(t) = U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s}(H(u(s)) + h(s))ds. \qquad (0.5)$$

Благодаря условиям на оператор H и вектор-функцию h, уравнение (0.5) можно решить методом последовательных приближений, причем оказывается, что полученное решение является решением задачи (0.1), (0.3).

Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ можно представить в виде интеграла Данфорда — Тейлора

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu(T)e^{\mu t}d\mu\ , \qquad (0.6)$$

где $R_\mu(T) = (\mu I - T)^{-1}$ — резольвента оператора T, а контур $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую спектр $\sigma(T)$ оператора T.

Предположим теперь, что оператор $T = L^{-1}M$ *секториален*, то есть существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор $S_{a,\Theta}(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \quad \mu \neq a\}$ лежит в резольвентном множестве $\rho(T)$ оператора T, причем $\|R_\mu(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \dfrac{\mathrm{const}}{|\mu - a|}$ при всех $\mu \in S_{a,\Theta}(T)$. Тогда, как следует из классических результатов, существует единственная полугруппа $\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ разрешающих операторов уравнения (0.4), которую тоже можно представить интегралом (0.6), где контур $\Gamma \subset S_{a,\Theta}(T)$ таков, что $|\arg\mu| \to \Theta$ при $|\mu| \to \infty$, $\mu \in \Gamma$. И, следовательно, задачу Коши (0.1), (0.3) и в этом случае можно свести к интегральному уравнению (0.5); только в этом уравнении $\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ — разрешающая полугруппа операторов уравнения (0.4) с секториальным оператором T.

Проблема возникает, когда оператор L необратим, в частности, когда его ядро $\ker L \neq \{0\}$. Такой случай возникает во всех перечисленных выше прикладных задачах, поэтому его изучение представляет несомненный интерес.

Нетрудно заметить, что задача (0.1), (0.2) разрешима не для любого начального значения $u_0 \in \mathcal{U}$. Поэтому актуальным является поиск таких допустимых начальных значений $u_0 \in \mathcal{U}$, при которых задача (0.1), (0.2) однозначно разрешима.

Задача (0.1), (0.2) в автономном случае ($f(t) \equiv 0$) изучалась ранее Г.А.Свиридюком. Поиск множества допустимых начальных данных $u_0 \in \mathcal{U}$ привел его к созданию метода фазового пространства. Основы этого метода были заложены в его кандидатской диссертации, затем развиты в докторской диссертации. Автор данной работы тоже внес некоторый вклад в развитие этого метода [14].

Идея метода фазового пространства заключается в сведении автономного ($f(t) \equiv 0$) уравнения (0.2) к уравнению $\dot{u} = B(u)$, заданному не на всем $\mathcal{U}$, а на некотором (гладком банаховом) многообразии, вложенном в $\mathcal{U}$, являющимся фазовым пространством этого уравнения в смысле Д.В.Аносова. Пользуясь этим методом, удалось показать, что в ряде интересных с точки зрения приложений случаях фазовым пространством автономных уравнений вида (0.2) служит банахово многообразие C^∞-диффеоморфное образу разрешающей группы (полугруппы) уравнения

$$L\dot{u} = Mu. \qquad (0.7)$$

В случае линейного уравнения (0.7) фазовое пространство просто совпадает с образом.

При исследовании разрешимости задачи Коши для уравнения соболевского типа были введены в рассмотрение *относительно спектрально ограниченные операторы* и соответствующие им группы разрешающих операторов с ядрами уравнения (0.7), а также *относительно p-секториальные* операторы и соответствующие им разрешающие полугруппы операторов уравнения (0.7).

В настоящее время теория относительно σ-ограниченных (относительно p-секториальных) операторов и соответствующих им групп (полугрупп) операторов с ядрами интенсивно развивается. Некоторые направления развития этой теории намечены в кандидатских диссертациях А.А.Ефремова, А.В.Келлер, В.Е.Федорова.

Отметим принципиальное отличие данного полугруппового подхода от *метода слабых решений* (Н.А.Сидоров, О.А.Романова, М.В.Фалалеев), *метода регуляризации* (А.И.Кожанов), и *метода дифференциальных включений* (R.E.Showalter, T.W.Ting).

Как уже указывалось ранее, в приложениях довольно часто встречается неавтономный случай, то есть когда в уравнении (0.2) $f(t) \not\equiv 0$; в частности, $f(t)$ может отвечать какому-либо внешнему воздействию, и это воздействие является функцией от времени.

Таким образом, имеется класс конкретных прикладных задач, которые сводятся к неавтономной абстрактной задаче (0.1), (0.2). Но непосредственное распространение метода фазового пространства на случай неавтономных уравнений сопряжено с некоторыми трудностями, и основной трудностью здесь является разработка понятия конфигурационного пространства, обобщающего понятие фазового пространства в автономном случае. Следовательно, исследование неавтономных уравнений соболевского типа и разработка нового метода их исследования — метода конфигурационного пространства — является *актуальной задачей.*

Цель работы. Целью диссертации является построение теории разрешимости задачи Коши (0.1) для неавтономных полулинейных уравнений соболевского типа (0.2.), а также разработка метода конфигурационного пространства, позволяющего получить описание множества допустимых начальных значений указанной задачи.

Методы исследования. Основным методом исследования служит метод конфигурационного пространства, являющийся обобщением метода фазового пространства, который был использован для изучения автономных уравнений. Содержание указанного метода составляют различные результаты линейного и нелинейного функционального анализа, в частности, теории относительно p-секториальных операторов и аналитических (полу)групп, теории дифференцируемых банаховых многообразий. Основным инструментом исследования служит понятие относительно p-секториального оператора. Заметим, что случай $p = 0$ рассматривался в докторской диссертации Г.А.Свиридюка.

Научная новизна и практическая ценность. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Изучена разрешимость начально-краевых задач для линеаризованных систем уравнений Осколкова ненулевого и высшего порядка.
2. Исследована разрешимость задачи (0.1), (0.2) при условиях, при которых

оператор M является σ-ограниченным относительно *бирасщепляющего* оператора L.

3. Исследована разрешимость указанной задачи в предположении, что оператор M сильно (L,p)-секториален.

4. Описаны нормальные формы и конфигурационные пространства полулинейного неавтономного уравнения (0.2) в случаях п.п. 2 и 3.

5. Доказаны теоремы, дающие необходимые и достаточные условия существования единственного решения задачи (0.1), (0.2), являющегося квазистационарной полутраекторией.

6. Все абстрактные результаты иллюстрированы конкретными начально-краевыми задачами для уравнений и систем уравнений в частных производных, моделирующих течение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта различного порядка.

7. Приведены полные описания конфигурационных пространств указанных прикладных задач.

Отметим, что все указанные задачи в данной постановке рассматриваются впервые; и результаты, полученные для них, являются новыми. Исследования базируются на строгих математических доказательствах, причем в соответствующих частных случаях получаются известные результаты.

Результаты диссертации могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории разрешимости задачи Коши для уравнений соболевского типа, а также могут быть полезны при решении ряда прикладных задач магнитогидродинамики. Они могут найти применение в исследованиях, проводимых в Воронежском, Новосибирском, Уральском и Челябинском университетах, ИМ СО РАН, а также в других университетах и математических институтах.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на совместных заседаниях семинара им. Г.И.Петровского и Московского математического общества (МГУ, 1995, 1998 гг.) [31, 46], на Воронежской зимней математической школе в 1995 г. [42], на международной конференции по математической физике (Кисегач, Челябинск, 1995 г.), на международной конференции и Чебышевских чтениях, посвященных 175-летию со дня рождения П.Л.Чебышева (Москва, 1996 г.) [33], на международной математической конференции "Topological, variational&singularities methods in nonlinear analysis" (Гданьск, 1997 г.), на конференции "Современные проблемы математики накануне третьего тысячелетия" (Челябинск, 1997 г.) [48], на третьем и четвертом сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1998, 2000 гг.) [32, 36], на девятом международном коллоквиуме по дифференциальным уравнениям (Пловдив, 1998 г.) [39], на международных конференциях в Новосибирске [27], Челябинске [28] и Великом Новгороде [49, 50].

А также были представлены на III международном конгрессе по индустриальной и прикладной математике (Гамбург, 1995 г.) [41], на международной конференции по нелинейным дифференциальным уравнениям (Киев, 1995 г.) [29], на Воронежских математических школах [34, 45], на шестой межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 1996 г.) [44], на Всероссийской конференции, посвященной памяти В.К.Иванова (Екатеринбург, 1998 г.) [47], на международных симпозиумах по нелинейной теории и ее приложениям (NOLTA'93, NOLTA'95, NOLTA'96), на школах [24], [26] и семинаре [25].

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре под рук.

проф. Г.А.Свиридюка (Челябинский государственный университет), на семинаре под рук. проф. Ю.А.Дубинского (Московский энергетический институт), на семинаре под рук. проф. А.И.Прилепко (Московский государственный университет), на семинаре под рук. проф. А.П.Солдатова в Новгородском государственном университете (неоднократно); а также на семинарах "Математическое моделирование механики сплошных сред" (рук. член-корр. РАН В.Н.Монахов, член-корр. РАН П.И.Плотников) ИГиЛ, "Неклассические уравнения математической физики" (рук. проф. В.Н.Врагов) ИМ СО РАН, "Качественная теория дифференциальных уравнений" (рук. проф. Т.И.Зеленяк) ИМ СО РАН, на объединенном семинаре кафедры теории функций Новосибирского государственного университета (рук. академик РАН М.М.Лаврентьев).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] — [50]. В совместных публикациях с научным консультантом Г.А.Свиридюку принадлежат постановки задач и некоторые идеи доказательств. А в совместных работах с учениками (О.П.Матвеева, М.Н.Даугавет и др.) постановки задач принадлежат автору настоящей работы.

Работа поддержана Международным научным фондом Дж.Сороса (грант ISF(1993), гранты ISSEP d95-1320, d97-756, d99-1024) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант РФФИ 1998 г.).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, списка обозначений и соглашений и списка литературы , который содержит 278 наименований. Общий объем диссертации составляет 246 страниц машинописного текста.

Краткое изложение содержания диссертации

Во введении приводится постановка задачи, обосновывается актуальность темы диссертации, обсуждается историография вопроса, излагается краткое содержание диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней излагаются необходимые сведения из теории (L,σ)- ограниченных и (L,p)-секториальных операторов, ибо эта теория является основой наших исследований.

В п.1.1 вводятся замкнутые относительно σ-ограниченные операторы. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U}) \}$$

и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ назовем соответственно *L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой* оператора M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно* оператора L (в дальнейшем — *(L,σ)-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, а контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a\}$. Рассмотрим интегралы *типа Ф.Рисса*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M)d\mu. \tag{1.1}$$

Можно показать, что в случае (L,σ)-ограниченности оператора M операторы $P : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и $Q : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ являются проекторами. Тогда: $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$; $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где $\mathcal{U}^0 = \ker P$; $\mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P$; $\mathcal{F}^0 = \ker Q$; $\mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q$. Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ ($\operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^k$), $k = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен. Тогда*
(i) $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M_k : (\operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^k) \to \mathcal{F}^k$, $k = 0, 1$;
(ii) *существует оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$;
(iii) *существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$;
(iv) *оператор* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$.

Пары $(\mathcal{U}^k, \mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$ подпространств называются парами инвариантных пространств операторов L и M.

Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда существуют операторы $R = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$ и $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$.

В условиях теоремы 1.1 имеет место разложение L-резольвенты оператора M в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k R^k M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

в области $\{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| > a\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Точка ∞ называется
(i) *устранимой особой точкой*, если $R \equiv O$,
(ii) *полюсом порядка* p, если $R^p \not\equiv O$, а $R^{p+1} \equiv O$,
(iii) *существенно особой точкой*, если $R^q \not\equiv O$ при всех $q \in \mathbb{N}$.

Случаи (i) и (ii) будем объединять в случай "несущественно особая точка".

Любой вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathcal{U}$ назовем *цепочкой* M*-присоединенных* векторов собственного вектора φ_0, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$ $q = 0, 1, \ldots$; $\varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}$, $q = 1, 2, \ldots$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*. Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L называется M*-корневым линеалом*. Если M-корневой линеал замкнут, то он называется M*-корневым пространством* оператора L.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен, а точка* ∞ *является*

(i) *существенно особой точкой* L*-резольвенты оператора* M. *Тогда* M*-корневой линеал оператора* L *содержится в* $\mathcal{U}^0$;

(ii) *полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$ L*-резольвенты оператора* M. *Тогда* M*-корневое пространство оператора* L *совпадает с* $\mathcal{U}^0$, *и длина любой цепочки* M*-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора* L *не превосходит числа* p;

(iii) *устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M. Тогда* $\ker L = \mathcal{U}^0$, $\operatorname{im} L = \mathcal{F}^1$, *и любой собственный вектор оператора L не имеет M-присоединенных векторов.*

Оператор L называется *бирасщепляющим*, если его образ $\operatorname{im} L$ и ядро $\ker L$ дополняемы в пространствах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ соответственно.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ σ-ограничен относительно бирасщепляющего оператора L. Тогда любой собственный вектор оператора L имеет цепочку M-присоединенных векторов конечной длины.*

В п.1.2 изучаются аналитические группы разрешающих операторов уравнения(0.7). Здесь пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ и операторы L и M те же, что и в п.1. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда уравнение соболевского типа (0.7) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{1.2}$$

$$L^L\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f, \tag{1.3}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. С учетом того, что операторы $(\alpha L - M)^{-1}M = (\alpha L - M)^{-1}\alpha L - I$ и $M(\alpha L - M)^{-1} = \alpha L(\alpha L - M)^{-1} - I$ непрерывны, а уравнения (1.2) и (1.3) заданы на пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно, их можно рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{1.4}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, а $\mathcal{V}$ — некоторое банахово пространство. *Решением* уравнения (1.4) называется вектор-функция $v \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{V})$, удовлетворяющая этому уравнению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{V}))$ называется *группой разрешающих операторов* (короче, *разрешающей группой*) уравнения (1.4), если

(i) $\forall s \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad V^sV^t = V^{s+t}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathcal{V}$ вектор-функция $v(t) = V^tv_0$ есть решение уравнения (1.4).

ТЕОРЕМА 1.4. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда существуют аналитические разрешающие группы уравнений* (1.2) *и* (1.3), *имеющие соответственно вид*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \qquad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

где контур Γ можно взять следующим $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > a\}$.

Множество $\ker V^\bullet = \{v \in \mathcal{V} : \quad V^tv = 0 \quad \exists t \in \mathbb{R}\}$ назовем *ядром*, а множество $\operatorname{im} V^\bullet = \{v \in \mathcal{V} : \quad v = V^0v\}$ — *образом* аналитической группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1.4), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (1.4) лежит в $\mathcal{B}$, т.е. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad v(t) \in \mathcal{B}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение $v \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{V})$ задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (1.4).

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — устранимая особая точка либо полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M. Тогда фазовое пространство уравнения* (1.2) (*уравнения* (1.3)) *совпадает с образом соответствующей разрешающей группы* (1.5).

В п.1.3 приводятся необходимые и достаточные условия для существования фазовых пространств. Сформулируем ряд необходимых условий (L,σ)-ограниченности оператора M в случае, когда ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M.

(A1) Длина любой цепочки M-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L ограничена числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

(A2) M-корневое подпространство $\mathcal{U}^0$ оператора L — дополняемое подпространство пространства $\mathcal{U}$.

Обозначим через $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U} \ominus \mathcal{U}^0$. Положим $M[\mathcal{U}^0] = \mathcal{F}^0$, $L[\mathcal{U}^2] = \mathcal{F}^2$.

(A3) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^2$.

Обозначим через M_0 сужение оператора M на $\mathcal{U}^0$.

(A4) Существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.

Обозначим через L_0 сужение оператора L на $\mathcal{U}^0$. По построению $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$. Положим $R = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$.

Обозначим через L_2 (M_2) сужение оператора L (M) на подпространство $\mathcal{U}^2$, а через P_2 (Q_2) — проектор вдоль $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) на $\mathcal{U}^2$ ($\mathcal{F}^2$). В силу теоремы Банаха существует оператор $L_2^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2;\mathcal{U}^2)$. Введем в рассмотрение оператор T, равный сужению оператора $M_0^{-1}(I - Q_2)M$ на $\mathcal{U}^2$, и оператор S_2, равный сужению оператора $L_2^{-1}Q_2M$ на $\mathcal{U}^2$. Очевидно, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2;\mathcal{U}^0)$, а $S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2)$. Построим множество $\mathcal{U}^1 = \{ u \in \mathcal{U} : \ u = (I - G)u^2, \ u^2 \in \mathcal{U}^2 \}$, где оператор $G = \sum_{q=0}^{p} R^q T S_2^q \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2;\mathcal{U}^0)$.

ТЕОРЕМА 1.6. *Пусть выполнены все условия* (A1) — (A4). *Тогда оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты оператора M.*

Уравнение (0.7) нетрудно редуцировать к системе уравнений

$$R\dot{u}^0 = u^0 + Tu^2, \quad \dot{u}^2 = S_2u^2,$$

где через R, T и S_2 обозначены соответственно сужения операторов $M_0^{-1}(I - Q_2)L$, $M_0^{-1}(I - Q_2)M$ и $L_2^{-1}Q_2M$ на подпространства $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{U}^2$ и $\mathcal{U}^2$ соответственно, а через L_2 обозначено сужение оператора L на подпространство $\mathcal{U}^2$. По построению операторы $R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2;\mathcal{U}^0)$, $S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2)$, причем оператор R нильпотентен, и его степень нильпотентности не превосходит числа p из условия $(A1)$.

ТЕОРЕМА 1.7. *Пусть выполнены все условия* (A1) — (A4). *Тогда*

(i) *множество* $\mathcal{U}^1$ — *фазовое пространство уравнения* (0.7);

(ii) *множество* $\mathcal{U}^1$ — *подпространство в* $\mathcal{U}$ *топлинейно изоморфное подпространству* $\mathcal{U}^2$, *причем* $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$;

(iii) $(\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}^2) \Longleftrightarrow T \equiv O$.

Рассмотрим три частных случая.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ — *бирасщепляющий* оператор, и оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Введем в рассмотрение два условия.

(B1) Любая цепочка M-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L имеет длину, равную $p \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\operatorname{coim} L = \mathcal{U} \ominus \ker L$ дополнение к ядру $\ker L$. Пусть $\tilde{L}$ — сужение оператора L на $\operatorname{coim} L$. В силу теоремы Банаха существует оператор $\tilde{L}^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{im} L; \operatorname{coim} L)$. Пусть выполнено условие (B1). Тогда существуют линеалы $\mathcal{U}^{0q} = \tilde{L}^{-1} M[\mathcal{U}^{0q-1}]$, $\mathcal{U}^{00} = \ker L$, $q = 1, 2, \ldots, p$. Очевидно, $M[\mathcal{U}^{0p}] \cap \operatorname{im} L = \{0\}$.

(B2) $M[\mathcal{U}^{0p}] \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 1.8. *Пусть операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, *причем оператор* L *— бирасщепляющий. Пусть выполнены условия* (B1) *и* (B2). *Тогда оператор* M (L, σ)*-ограничен, причем* ∞ *— несущественная особая точка* L*-резольвенты оператора* M.

Оператор L назовем ***фредгольмовым***, если его индекс $\operatorname{ind} L = 0$.

ТЕОРЕМА 1.9. *Пусть оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ *— фредгольмов, а оператор* $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:* (i) *Оператор* M (L, σ)*-ограничен, причем* ∞ *— несущественная особая точка* L*-резольвенты оператора* M; (ii) *выполнено условие* (A1).

ТЕОРЕМА 1.10. *Пусть* $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{F}$, *и существует точка* $\alpha \in \mathbb{C}$ *такая, что* $\det(\alpha L - M) \neq 0$. *Тогда оператор* M (L, σ)*-ограничен, причем* ∞ *— устранимая особая точка либо полюс* L*-резольвенты оператора* M.

В п.1.4 рассматриваются относительно p-секториальные операторы. Здесь пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ и операторы L и M те же, что и в п.1.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Оператор M называется ***p-секториальным относительно*** оператора L (короче, (L, p)***-секториальным***), если существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{\Theta,a}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\arg(\mu - a)| < \Theta, \ \ \mu \neq a \} \subset \rho^L(M),$$

причем $\max\{ \| R^L_{(\mu,p)}(M) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \ \| L^L_{(\mu,p)}(M) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \} \leq \dfrac{\text{const}}{\prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$ при любых $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{\Theta,a}(M)$, где $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M)$, $L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Не теряя общности, можно положить $a = 0$ в определении 1.5.

В п.1.5 изучаются аналитические полугруппы разрешающих операторов уравнения (0.7).

ТЕОРЕМА 1.11. *Пусть оператор* $M (L, p)$*-секториален. Тогда существует аналитическая и равномерно ограниченная разрешающая полугруппа уравнения* (1.2)(*уравнения* (1.3)), *имеющая соответствующий вид* (1.5), *только контур* Γ *имеет вид* $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |arg \mu| \to \Theta$ *при* $|\mu| \to \infty\}$.

ТЕОРЕМА 1.12. *Пусть оператор* M (L, p)*-секториален. Тогда*
(i) *операторы* $L_0 : \mathcal{U}^0 \to \mathcal{F}^0$, $M_0 : \mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}^0$;
(ii) *оператор* $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$;
(iii) *существует оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

Здесь $\mathcal{U}^0$ и $\mathcal{F}^0$ — ядра, а $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$ — образы соответствующих полугрупп (1.5). L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^k$ $(\mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M)$, $k = 0, 1$.

В конце этого параграфа изучены фазовые пространства уравнений (1.2) и (1.3).

ТЕОРЕМА 1.13. *Пусть оператор* $M(L,p)$*-секториален. Тогда фазовое пространство уравнения* (1.2)((1.3)) *совпадает с образом* $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$.

В п.1.6 приводятся условия, достаточные для существования единиц разрешающих полугрупп уравнений (1.2), (1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-секториальным справа (слева)*, если он (L,p)-секториален и при всех $\lambda,\ \mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_q \in S^L_{a,\Theta}(M)$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} M\, u\|_{\mathcal{U}} \le \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod\limits_{q=o}^{p} |\mu_q|} \qquad \forall u \in \operatorname{dom} M,$$

где $\text{const} = \text{const}(u)$

(существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M\,(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M)\, f\|_{\mathcal{F}} \le \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod\limits_{q=o}^{p} |\mu_q|} \qquad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}},$$

где $\text{const} = \text{const}(f)$).

ТЕОРЕМА 1.14. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-секториален справа (слева). Тогда существует единица полугруппы* $\{U^t:\ t \in \mathbb{R}_+\}$ $(\{F^t:\ t \in \mathbb{R}_+\})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-секториальным*, если он сильно (L,p)-секториален слева и при любых $\lambda, \mu_q \in S^L_{\Theta}(M)$, $q = 0, 1, \ldots, p$

$$\|(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \le \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|}.$$

ТЕОРЕМА 1.15. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-секториален. Тогда существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

Вторая глава посвящена исследованию задачи (0.1), (0.2) в случае, когда оператор M является (L,σ)-ограниченным.

В п.2.1 изучается разрешимость задачи Коши (0.1.) для линейного неоднородного уравнения соболевского типа:

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{2.1}$$

Здесь операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ и $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$, причем $\ker L \ne 0$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть оператор* M (L,σ)*-ограничен,* ∞ *— устранимая особая точка либо полюс порядка* $p \in \mathbb{N}$ L*-резольвенты оператора* M*. Тогда при любом* $f \in C^\infty(I^b_a;\mathcal{F})$ *и при любом* $u_0 \in \mathcal{M}_f$ *существует единственное решение* $u \in C^\infty(I^b_a;\mathcal{U})$ *задачи* (0.1), (2.1) *имеющее вид:*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} R^q M_0^{-1}(I-Q)\frac{d^q f}{dt^q}(t) + U_1^t u_0^1 + \int\limits_0^t U_1^{t-s} L^{-1} Q f(s)\, ds.$$

В п.2.2 с помощью результатов п.2.1 исследована задача Коши — Дирихле для системы уравнений Осколкова

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (\tilde{v}\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)\tilde{v} - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v \end{cases} \tag{2.2}$$

моделирующей в линейном приближении течение вязкоупругой несжимаемой жидкости нулевого порядка. Здесь $v = (v_1,\ldots,v_n)$, $v_k = v_k(x,t)$, $k = \overline{1,n}$ соответствует вектору скорости жидкости; функция $p = p(x,t)$ отвечает давлению жидкости; вектор-функция $f = (f_1,\ldots,f_n)$, $f_k = f_k(x)$ характеризует объемные силы; а вектор-функция $\tilde{v} = (\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n)$, $\tilde{v}_k = \tilde{v}_k(x)$ соответствует стационарному решению исходной системы. Параметр $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризует вязкие, а параметр $æ \in \mathbb{R}$ — упругие свойства жидкости.

В этом параграфе получена теорема (теорема 2.2.1.) существования единственного решения указанной задачи и получено описание ее фазового пространства. Показано, что в рассматриваемой модели фазовым пространством является полное аффинное многообразие, диффеоморфное некоторому подпространству в $\mathcal{U}$. Найден более простой вид оператора L.

В п.2.3 исследована первая начально-краевая задача для системы уравнений Осколкова

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (\tilde{v}\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)\tilde{v} + \\ + \sum\limits_{i=1}^{K} \beta_i\nabla^2\omega_i - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v, \\ \dfrac{\partial\omega_i}{\partial t} = v + \alpha_i\omega_i, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}_-, \qquad i = \overline{1,K}, \end{cases} \tag{2.3}$$

моделирующей в линейном приближении динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина - Фойгта порядка $K > 0$.

В п.2.4 изучена разрешимость задачи Коши — Дирихле для системы уравнений Осколкова

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)u_t = \nu\nabla^2 u - (\tilde{u}\cdot\nabla)u - (u\cdot\nabla)\tilde{u} + \\ + \sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{s=1}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot u, \\ \dfrac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = u + \alpha_m w_{m,s}\,, \quad m = \overline{1,\ M}, \\ \dfrac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}\,, \quad s = \overline{1,\ n_m - 1}, \\ \alpha_m < 0, A_{m,s} > 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

моделирующей в линейном приближении течение вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта порядка $k > 0$, $k = n_1 + n_2 + \ldots + n_M$. Системы (2.3), (2.4) получены в результате линеаризации соответствующих моделей [15] , [17].

В п.п. 2.3 и 2.4 доказаны теоремы существования единственного решения указанных задач (теоремы 2.3.1 и 2.4.1), обобщающие результаты п.2.2.

В п.2.5 рассматривается задача (0.1), (0.2) в случае относительной σ-ограниченности оператора M.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ и $M \in C^\infty(\mathcal{U};\mathcal{F})$, функция $f : \mathbb{R} \to \mathcal{F}$. Рассмотрим задачу Коши (0.1) для уравнения

$$L\dot{u} = M(u) + f. \tag{2.5}$$

Пусть оператор L бирасщепляющий, обозначим через $M'_{u_0} \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ производную Фреше оператора M в точке $u_0 \in \mathcal{U}$ и введем в рассмотрение цепочки M'_{u_0}-присоединенных векторов оператора L, которые будем выбирать из некоторого дополнения $\operatorname{coim} L = \mathcal{U} \ominus \ker L$ к ядру $\ker L$. Введем в рассмотрение условие

(A1). Независимо от выбора $\operatorname{coim} L$ любая цепочка M'_{u_0}-присоединенных векторов любого вектора $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ содержит точно p элементов.

Обозначим через $\tilde{L}$ сужение оператора L на $\operatorname{coim} L$. В силу теоремы Банаха о замкнутом графике оператор $\tilde{L} : \operatorname{coim} L \to \operatorname{im} L$ — топлинейный изоморфизм. Положим $\mathcal{U}_0^0 = \ker L$ и построим множества $\mathcal{U}_q^0 = \tilde{A}^q[\mathcal{U}_0^0]$, $q = 1, 2, \ldots, p$, где $\tilde{A} = \tilde{L}^{-1} M'_{u_0}$. Очевидно, множества $\mathcal{U}_q^0 \subset \operatorname{coim} L$ являются линейными пространствами, следовательно, образ $\mathcal{F}_p^0 = M'_{u_0}[\mathcal{U}_p^0]$ есть тоже линейное пространство, причем $\mathcal{F}_p^0 \cap \operatorname{im} L = \{0\}$ (если выполнено (A1)). Введем в рассмотрение еще одно условие

(A2). $\mathcal{F}_p^0 \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$.

Уравнение (2.5) перепишем в виде

$$L\dot{u} = M'_{u_0} u + F(u) + f, \tag{2.6}$$

где оператор $F = M - M'_{u_0} \in C^\infty(\mathcal{U};\mathcal{F})$ по построению. Подействовав на уравнение (2.6) последовательно проекторами $Q_q, q = 0, 1, \ldots, p$, $I - Q$, (Q_q — проекторы на соответствующие подпространства F), получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} L\dot{u}_1^0 = M'_{u_0} u_0^0 + F_0(u) + f_0^0, \\ \ldots \\ L\dot{u}_p^0 = M'_{u_0} u_{p-1}^0 + F_{p-1}(u) + f_{p-1}^0, \\ 0 = M'_{u_0} u_p^0 + F_p(u) + f_p^0, \\ L\dot{u}^1 = (I - Q)M(u) + f^1, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $u_q^0 \in \mathcal{U}_q^0$, $f_q^0 \in \mathcal{F}_q^0$, $F_q(u) = Q_q F(u) + Q_q M'_{u_0} u^1$, $q = 0, 1, \ldots, p$; $u^1 \in \mathcal{U}^1$, $f^1 \in \mathcal{F}^1$. ($\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$ — некоторые подпространства пространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из теоремы 1.8 вытекает, что в рассматриваемом случае оператор M'_{u_0} (L,σ)-ограничен в точке u_0, причем ∞ — полюс порядка p оператор-функции $(\mu L - M'_{u_0})^{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Решением* задачи (0.1), (2.5) называется вектор-функция $u \in C^\infty((-t_0;t_0);\mathcal{U})$, $t_0 = t_0(u_0) > 0$, удовлетворяющая уравнению (2.5) и условию (0.1).

Хорошо известно, что, во-первых, решения задачи (0.1), (2.5) существуют не для всех $u_0 \in \mathcal{U}$. Во-вторых, даже в случае существования решения указанной задачи оно может быть неединственным.

Для устранения указанных трудностей введем два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ назовем *конфигурационным пространством* уравнения (2.5), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{U}$ такой, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (0.1), (2.5), причем $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $\mathcal{B}^t = \mathcal{B} \times \mathbb{R}$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$, то множество $\mathcal{B}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Решение $u = u(t)$ задачи (2.5), для которого выполняется $L\dot{u}^0 \equiv 0 \quad \forall t \in (-t_0; t_0)$, где $u^0 = Pu$, называется *квазистационарной траекторией* уравнения (2.5).

Для выделения квазистационарных траекторий из множества возможных решений задачи (0.1), (2.5) наложим два условия.

(A3). $\quad f^0_q(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ p.$

Рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} : u^0_q = \mathrm{const}, \quad q = 1,\ 2, \ldots,\ p\}$. Как нетрудно видеть, $\tilde{\mathcal{U}}$ — полное аффинное многообразие, моделируемое подпространством $\mathcal{U}^0_0 \dot{+} \mathcal{U}^1$. Пусть точка $u_0 \in \tilde{\mathcal{U}}$, через $\mathcal{O}_{u_0}$ обозначим некоторую окрестность $\mathcal{O}_{u_0} \subset \tilde{\mathcal{U}}$ точки u_0.

(A4). $\quad F_q(u) \equiv 0 \qquad \forall u \in \mathcal{O}_{u_0}, \quad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ p.$

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть:*

(i) *операторы* $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ *и* $M \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, *причем* L — *бирасщепляющий оператор, и выполнены условия* (A1) *и* (A2);

(ii) *точка* $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$, *где* $\mathcal{B}^t = \{(u, t) \in \tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{R} : \quad Q_0(M(u) + f(t)) = 0\}$;

(iii) *вектор-функция* $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{F})$;

(iv) *выполнены условия* (A3), (A4).

Тогда существует единственное решение задачи (0.1), (2.5), *являющееся квазистационарной траекторией, причем* $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t \quad \forall t \in (-t_0; t_0)$.

В силу условий (A1) — (A4) система (2.7) в окрестности $\mathcal{O}_{u_0}$ редуцируется к виду

$$\begin{cases} 0 = M'_{u_0} u^0_0 + F_0(u) + f^0_0, \\ L\dot{u}^1 = (I - Q)M(u) + f^1. \end{cases} \tag{2.8}$$

При доказательстве теоремы 2.2 установлено, что система (2.8) в свою очередь редуцируется к виду $\dot{u}^1 = \Phi(u^1; t)$, где $\Phi \in C^\infty(\mathcal{O}^1_{u_0} \times \mathbb{R}; \mathcal{U}^1)$.

В п.2.6 рассматривается система уравнений Осколкова

$$\begin{cases} (1 - æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla \cdot v, \end{cases} \tag{2.9}$$

моделирующая динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта нулевого порядка. Функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad v_i = v_i(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n$ и $p = p(x, t)$ и параметры $æ$ и ν имеют тот же физический смысл, что и в модели (2.2). Функция $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \quad f_i = f_i(x, t)$ характеризует внешнее воздействие, которое предполагается известным. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,\ 3,\ 4$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞.

Для системы (2.9) рассматривается задача Коши — Дирихле

$$\begin{aligned} &v(x, 0) = v_0(x) \qquad \forall x \in \Omega, \\ &v(x, t) = 0 \qquad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

От системы (2.9) перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \bar{p} + f, \\ 0 = -\nabla(\nabla\cdot v). \end{cases}$$

Редуцируем задачу (2.9), (2.10) к задаче (0.1), (2.5). Для этого положим

$$\mathcal{U} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p, \qquad \mathcal{F} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p,$$

где $\mathbf{H}_\sigma$ — замыкание в норме $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$ линеала соленоидальных векторов $\{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n \ : \ \nabla\cdot v = 0\}$, $\mathbf{H}_\pi = \mathbf{H}_\sigma^\perp$, $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$. Обозначим через $\Sigma : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{H}_\sigma$ ортопроектор. Тогда $\Sigma \in \mathcal{L}((W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$. Положим $\operatorname{im}\Sigma = \mathbf{H}_\sigma^2$, $\ker\Sigma = \mathbf{H}_\pi^2$. Операторы L , M : $\mathcal{U} \to \mathcal{F}$ определим формулами

$$L := \begin{pmatrix} \Sigma A_æ\Sigma & \Sigma A_æ\Pi & O \\ \Pi A_æ\Sigma & \Pi A_æ\Pi & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad M(u) := \begin{pmatrix} \Sigma B(u_\sigma+u_\pi) \\ \Pi B(u_\sigma+u_\pi) - u_p \\ C(u_\sigma+u_\pi) \end{pmatrix},$$

где $\Pi = I - \Sigma$, $A_æ = 1 - æ\nabla^2$; $B(u_\sigma+u_\pi) := \nu\nabla^2(u_\sigma+u_\pi) - ((u_\sigma+u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi), C(u_\sigma+u_\pi) := -\nabla(\nabla\cdot(u_\sigma+u_\pi))$, $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p)$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть* $n = 2,\ 3,\ 4$ *и* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_{æ\sigma})$. *Пусть* $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{L}^2(\Omega))$, *а* $(v_0, 0) \in \mathcal{B}^0$. *Тогда для некоторого* $t_0 = t_0(v_0)$ *существует единственное решение* $(v, \bar{p})$ *задачи* (2.9), (2.10) *такое, что* $v \in C^\infty((-t_0, t_0)\ ;\ \mathbf{H}_\sigma^2)$, $v_\pi = 0$, *а* $\bar{p} = A_{æ\pi}^{-1}\Pi A_æ^{-1}(B(v_\sigma) + f_\sigma(t)) + f_\pi(t)$.

Здесь $\mathcal{B}^t = \{(u,t) \in \tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{R} \ : \ A_{æ\pi}^{-1}\Pi A_æ^{-1}(B(u_\sigma) + f_\sigma(t)) + f_\pi(t) = u_p\ ,\ u_\pi = 0\}$ является конфигурационным пространством рассматриваемой задачи.

В п.2.7 изучается задача Тейлора для системы (2.9), моделирующая ситуацию, когда вязкоупругая несжимаемая жидкость Кельвина-Фойгта занимает пространство между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами бесконечной длины. В данной ситуации ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$ (с кусочно-гладкой границей) выбирают так, чтобы на части ее границы $\partial_1\Omega$ (лежащей, например, при $n = 3$ на двух плоскостях α и β, перпендикулярных оси цилиндров) выполнялось условие периодичности (т.е. $v(x,t)|_{\partial\Omega\cap\alpha} = v(x,t)|_{\partial\Omega\cap\beta}$, $\partial\Omega \cap (\alpha\cup\beta) = \partial_1\Omega \quad \forall t \in \mathbb{R}$). Кроме того, выбирается некоторое стационарное решение $\tilde{v} = \tilde{v}(x)$ системы (2.9), удовлетворяющее на $\partial_1\Omega$ условию периодичности, а на $\partial_2\Omega = \partial\Omega\setminus\partial_1\Omega$ — неоднородным условиям Дирихле (например, течение Куэтта), и исследуется динамика отклонения $v = v(x,t)$ от этого стационарного решения, вызванного начальным условием. Поэтому система (2.9) приобретает вид

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)\tilde{v} - (\tilde{v}\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p, \\ 0 = \nabla\cdot v. \end{cases} \tag{2.11}$$

Рассматривается задача Тейлора

$$\begin{aligned} &v(x,0) = v_0(x)\ , \qquad \forall x \in \Omega; \\ &v(x,t) = 0\ , \qquad \forall (x,t) \in \partial_2\Omega\times\mathbb{R}; \\ &v(x,t)\ \text{удовлетворяет условию периодичности на}\ \partial_1\Omega\times\mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.12}$$

для системы (2.11).

В п.2.8 исследуется задача Коши-Дирихле для системы уравнений

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v, \\ \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \\ \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ K, \end{cases} \tag{2.13}$$

моделирующей динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта порядка $K > 0$. Параметры $\beta_l \in \mathbb{R}_+$, $l = 1,\ 2,\ \ldots,\ K$, определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Заметим, что если в системе (2.13) положить $K = 0$, то получим модель движения (2.9).

В п.2.9 рассматривается первая начально-краевая задача для системы уравнений

$$\begin{cases} (1-æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{m=1}^{r}\sum\limits_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \\ -\nabla p + f, \qquad 0 = \nabla\cdot v, \\ \dfrac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0}, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \\ \dfrac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_m - 1, \\ \alpha_m \in \mathbb{R}_-, \quad A_{m,s} \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{2.14}$$

моделирующей динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта высшего порядка. Параметры $A_{m,s}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Заметим, что система (2.14) является системой более общего вида, чем система (2.13) и тем более (2.9). В моделях 2.6 — 2.9 соответствующий оператор M является (L,σ)-ограниченным, причем любой вектор $\phi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один M-присоединенный вектор.

Третья глава содержит результаты о разрешимости задачи (0.1), (0.2) в случае (L,p)-секториальности оператора M.

В п. 3.1 изучается задача (0.1), (0.2) в предположении, что оператор M сильно (L,p)-секториален.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Через $\mathcal{U}_M$ обозначим линеал $\operatorname{dom} M$, снабженный нормой графика $|||\cdot||| = \|M\cdot\|_{\mathcal{F}} + \|\cdot\|_{\mathcal{U}}$. Пусть оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$, функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{F})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Локальным решением* (далее просто — *решением*) задачи (0.1), (0.2) назовем вектор-функцию $u \in C^\infty((0,T);\mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (0.2) и такую, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.

Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Известно, что в этом случае решение задачи (0.1), (0.2) существует не для любого $u_0 \in \mathcal{U}_M$, а если решение существует, то оно может быть неединственным. Поэтому введем два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U}_M \times \bar{\mathbb{R}}_+$ назовем *конфигурационным пространством* уравнения (0.2), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{U}_M$ такой, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (0.1), (0.2), причем $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть пространство $\mathcal{U}$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$ так, чтобы $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, а $w(t) \in \mathcal{U}_1$ при всех $t \in (0,T)$, уравнения (0.2) назовем *квазистационарной полутраекторией*, если $L\dot{v} \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $\mathcal{B}^t = \mathcal{B} \times \bar{\mathbb{R}}_+$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$, то множество $\mathcal{B}$ называется *фазовым пространством* уравнения (0.2). Введенное в определении 3.3 понятие *квазистационарной полутраектории* обобщает понятие *квазистационарной траектории*, введенное для динамического случая.

В силу того, что оператор M сильно (L,p)-секториален, пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где

$$\mathcal{U}^0 = \{\varphi \in \mathcal{U} : U^t\varphi = 0 \ \ \exists t \in \mathbb{R}_+\}, \quad \mathcal{F}^0 = \{\psi \in \mathcal{F} : F^t\psi = 0 \ \ \exists t \in \mathbb{R}_+\} \ —$$

ядра, а

$$\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : \lim_{t \to 0+} U^t u = u\}, \quad \mathcal{F}^1 = \{f \in \mathcal{F} : \lim_{t \to 0+} F^t f = f\} \ —$$

образы аналитических разрешающих полугрупп

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \qquad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

($\Gamma \subset S^L_{\Theta,a}(M)$ — контур такой, что $\arg\mu \to \pm\Theta$ при $|\mu| \to +\infty$) линейного однородного уравнения (0.7).

Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ ($\mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M$), $k = 0, 1$. Тогда $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M_k : \mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}^k$, $k = 0, 1$, причем сужения M_0 и L_1 операторов M и L на пространства $\mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$ и $\mathcal{U}^1$ соответственно являются линейными непрерывными операторами и имеют ограниченные обратные операторы. Эти результаты следуют из п.п. 1.5 и 1.6.

В силу этих результатов приведем задачу (0.1), (0.2) к эквивалентной форме

$$\begin{aligned} R\dot{u}^0 &= u^0 + G(u) + g(t) \qquad u^0(0) = u^0_0, \\ \dot{u}^1 &= Su^1 + H(u) + h(t) \qquad u^1(0) = u^1_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $u^k \in \mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$, $u = u^0 + u^1$, операторы $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $G = M_0^{-1}(I - Q)F$, $H = L_1^{-1}QF$, $g = M_0^{-1}(I - Q)f$, $h = L_1^{-1}Qf$.

Здесь $Q \in \mathcal{L}(F)(\equiv \mathcal{L}(F;F))$ — проектор, расщепляющий пространство $\mathcal{F}$ требуемым образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Систему уравнений (3.1) назовем *нормальной формой* уравнения (0.2).

В дальнейшем ограничимся изучением таких квазистационарных полутраекторий уравнения (0.2), для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Для этого предположим, что оператор

R — *бирасщепляющий.* Положим $\mathcal{U}^{00} = \ker R$, а через $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$ обозначим некоторое дополнение к подпространству $\mathcal{U}^{00}$. Тогда первое уравнение нормальной формы (3.1) редуцируется к виду

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \text{где} u = u^{00} + u^{01} + u^1.$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, а оператор R — бирасщепляющий. Пусть существует квазистационарная полутраектория $u = u(t)$ уравнения* (0.2). *Тогда она удовлетворяет соотношениям* $0 = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \quad u^{01} = \text{const}$.

Теорема 3.1 устанавливает необходимые условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (0.2). Перейдем к рассмотрению достаточных условий.

Известно, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M оператор S секториален. Значит, он порождает на $\mathcal{U}^1$ аналитическую полугруппу, которую мы обозначим через $\{U_1^t : t \geq 0\}$, так как в действительности оператор U_1^t есть сужение оператора U^t на $\mathcal{U}^1$.

Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ следует, что существует проектор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующий данному расщеплению. Можно показать, что $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$. Тогда пространство $\mathcal{U}_M$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$ так, что вложение $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k, \quad k = 0,\ 1$, плотно и непрерывно.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, оператор R — бирасщепляющий, оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$, а вектор-функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{F})$. Пусть*

(i) *в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 выполнено соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t));$$

(ii) *проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, и оператор $I + P_R G'_{u_0^0} : \mathcal{U}_M^{00} \to \mathcal{U}_M^{00}$ — топлинейный изоморфизм* ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00}$);

(iii) *для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \geq 0\}$ выполнено условие*

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда существует единственное решение задачи (0.1), (0.2), *являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения* (0.2).

Теперь пусть $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{F}_k$ — банаховы пространства, операторы $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$, а операторы $B_k \in Cl(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k), \quad k = 1,2$. Построим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2, \quad M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} B_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть операторы B_k сильно (A_k, p_k)-секториальны, $k = 1,2$; причем $p_1 \geq p_2$. Тогда оператор M сильно (L,p_1)-секториален.*

В п.3.2 исследуется задача Коши-Дирихле для системы уравнений

$$\begin{cases} (1 - \lambda\nabla^2)\mathbf{v}_t = \nu\nabla^2\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{p} - g\gamma\theta + \mathbf{f}^1, \\ 0 = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}), \\ \theta_t = æ\nabla^2\theta - \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + \mathbf{v}\cdot\gamma + f^2, \end{cases} \tag{3.2}$$

которая моделирует эволюцию скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_i = v_i(x,t)$, градиента давления $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_i = p_i(x,t)$ и температуры $\theta = \theta(x,t)$ простейшей неньютоновской жидкости — несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта нулевого порядка. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости соответственно, а параметр $\varkappa \in \mathbb{R}_+$ характеризует теплопроводность жидкости; $g \in \mathbb{R}_+$ — ускорение свободного падения; вектор $\gamma = (0, \ldots, 0, 1)$ — орт в $\mathbb{R}^n$; свободные члены $\mathbf{f}^1 = (f_1^1, \ldots, f_n^1)$, $f_i^1 = f_i^1(x,t)$, $f^2 = f^2(x,t)$ отвечают внешнему воздействию на жидкость.

В данном параграфе исследуется разрешимость первой начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), \qquad \theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad \forall x \in \Omega; \\ &\mathbf{v}(x,t) = 0, \qquad \theta(x,t) = 0, \qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{3.3}$$

для системы (3.2).

Доказана теорема существования единственного решения задачи (3.2), (3.3), являющегося квазистационарной полутраекторией. В этой ситуации оператор M является сильно $(L,1)$-секториальным. Дается описание конфигурационного пространства рассматриваемой задачи.

В п. 3.3 и п. 3.4 исследуется задача термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта ненулевого и высшего порядка соответственно. Здесь оператор M также является сильно $(L,1)$-секториальным. Даны полные описания конфигурационных пространств указанных прикладных задач.

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту профессору Георгию Анатольевичу Свиридюку за постоянное внимание к работе и многочисленные беседы, способствовавшие ее написанию.

Работы автора по теме диссертации:

[1] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* Быстро-медленная динамика вязкоупругих сред // ДАН СССР. 1989. Т.308, №4. С.791 — 794.

[2] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Сиб. матем. журн. 1990. Т.31, №5. С.109 — 119.

[3] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* Заметки о линейных моделях вязкоупругих сред// Вестник ЧелГУ. Сер. Матем. Мех. Вып.1. Челябинск. 1996. С.135 — 147.

[4] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* Медленные многообразия одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Вестник ЧелГУ. Сер. Матем. Мех. 1991. №1. С.3 — 20.

[5] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* О галеркинских приближениях уравнений типа Соболева // Изв. вузов. Матем. 1989. №10. С.44 — 47.

[6] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости// Матем. заметки. 1998. Т. 63. №3. С. 442 — 450.

[7] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* О разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравн. (Качеств. теория). Рязань. 1990. С.108 — 115.

[8] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* Фазовые пространства одного класса операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т.26, №2. С.250 — 258.

[9] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г., Дудко Л.Л.* Линейные операторы, σ-ограниченные относительно фредгольмовых операторов // Деп. ВИНИТИ. 1995. № 1401-В95. 14 с.

[10] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г., Дудко Л.Л.* Необходимые и достаточные условия относительной σ-ограниченности линейных операторов // Докл. АН (Россия). 1995. Т.345, №1, С.25 — 27.

[11] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г., Дудко Л.Л.* Относительная σ-ограниченность линейных операторов // Изв. вузов. Математика. 1997. №7(422), С.68 — 73.

[12] *Сукачева Т.Г.* Дальнейшие результаты о разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1992. №5. С.70 — 72.

[13] *Сукачева Т.Г.* Задача Тейлора для жидкости Кельвина-Фойгта. // Деп. ВИНИТИ 9.03. 1989. № 1577-В89. Новгород. 12 с.

[14] *Сукачева Т.Г.* Исследование фазовых пространств полулинейных сингулярных уравнений динамического типа// Автореферат диссерт. на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук. Воронежский государственный университет. 1990. 16 с.

[15] *Сукачева Т.Г.* Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка// Дифференц. уравн. 1997. Т.33, №4. С.552 — 557.

[16] *Сукачева Т.Г.* Об одном обобщении теоремы Сарда // Функц. анализ. Ульяновск. 1989. С.92 — 94.

[17] *Сукачева Т.Г.* О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка// Изв. вузов. Матем. 1998. №3(430) . С.47 — 54.

[18] *Сукачева Т.Г.* О разрешимости нестационарной задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости// Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, №8. С.1106 — 1112.

[19] *Сукачева Т.Г.* Фазовые пространства полулинейных сингулярных уравнений динамического типа // Деп. ВИНИТИ 9.01. 1989. № 194-В89. Новгород. 28 с.

[20] *Сукачева Т.Г., Антонова А.Ю., Даугавет М.Н., Ефимова Ю.А.* Линеаризованная система Осколкова высшего порядка // Деп. ВИНИТИ 7.07.00. № 1880-В00. Великий Новгород. 25 с.

[21] *Сукачева Т.Г., Антонова А.Ю., Даугавет М.Н., Ефимова Ю.А.* Линеаризованная система Осколкова ненулевого порядка // Деп. ВИНИТИ 7.07.00. № 1879-В00. Великий Новгород. 25 с.

[22] *Сукачева Т.Г., Викторова Т.С.* О разрешимости задачи Тейлора для несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта // Деп. ВИНИТИ 17.04.96. № 1263-В96. Новгород. 15 с.

[23] *Сукачева Т.Г., Матвеева О.П.* Об одной нестационарной задаче динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта первого порядка// Деп. ВИНИТИ 17.04.96. № 1262-В96. Новгород. 16 с.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ:

[24] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* Морфология фазовых пространств// III Всес. школа "Понтрягинсие чтения". Кемерово. 1990. С.63.

[25] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* О линейных моделях вязкоупругих сред// Семинар "Моделир. устойчивости физических процессов". Киев. 1991. С.79.

[26] *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* О разрешимости задачи Коши для полулинейного сингулярного дифференциального уравнения с нетеровым оператором при производной// XVI Школа по теории операторов в функц. простр. Тез. докл. Н.Новгород. 1991, С.203.

[27] *Sukacheva T.G.* The Cauchy problem for nonautonomic sobolev-type equations// Материалы международной конференции "Выпускник НГУ и научно-технический прогресс". Часть 1. Новосибирск. 1999. С.55.

[28] *Sukacheva T.G.* Cauchy problem for nonautonomic sobolev-type equations// Дифференциальные и интегральные уравнения. Тезисы докладов международной научной конференции. 22-26 июня 1999 г. ЧелГУ. Челябинск. 1999. С.128.

[29] *Sukacheva T.G.* Cauchy problem for some class of nonstationary operator equations // Proceed. of international conference on nonlinear dif. equations. Kiev. Book of abstracts. 1995. P.162.

[30] *Сукачева Т.Г.* Задача Коши для одного класса сингулярных операторных уравнений // XIV Школа по теории операторов в функц. простр. Тез. докл. Новгород. 1989. ч.III. С.53.

[31] *Сукачева Т.Г.* Задача Коши для полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева// Успехи матем. наук. 1995. Т.50, №4. С.143.

[32] *Sukacheva T.G.* Quasi-stationary semi-trajectories in the nonstationary thermoconvection the viscoelastic incompressible fluid of the highest order// Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), посвященный памяти С.Л.Соболева (1908-1989).

Тезисы докл. Часть II. - Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН. 1998. С. 135.

[33] *Сукачева Т.Г.* Квазистационарные полутраектории одного класса операторных дифференциальных уравнений // Материалы международной конф. и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П.Л.Чебышева. Т.2. М.: Изд-во мех.-матем. фак-та МГУ. 1996. С.323 — 325.

[34] *Сукачева Т.Г.* Квазистационарные полутраектории одного класса уравнений типа Соболева //ВВМШ. Современные методы в теории краевых задач. "Понтрягинские чтения-VII". Тез. докл. 17-23 апреля 1996 г. Воронеж. 1996. С.171.

[35] *Сукачева Т.Г.* Конкретные интерпретации абстрактной задачи Коши для одного класса операторных дифференциальных уравнений// Вестник Чел. унив. Сер. Матем. Мех. Вып.1. Челябинск. 1991. С.151.

[36] *Сукачева Т.Г.* Линеаризованные системы уравнений Осколкова ненулевого порядка // Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), посвященный памяти М.А.Лаврентьева (1900-1980). Тезисы докл. Часть I. - Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН. 2000. С. 82.

[37] *Сукачева Т.Г.* Медленные многообразия в системе Осколкова// Тез. XII итог. научн. конф. Челябинск. 1988. С.19.

[38] *Сукачева Т.Г.* Медленные многообразия задачи Тейлора для системы Осколкова// Уральск. регион. конф. III "Функц. диф. ур. и их прил." Тез. докл. Пермь. 1988. С.294.

[39] *Sukacheva T.G.* Nonautonomic sobolev-type equations.// Abst. of the Ninth Intern. Coll. Diff. Eq. Bulgaria. - Plovdiv. August 18-23, 1998. P.185.

[40] *Сукачева Т.Г.* О галеркинских приближениях сингулярных нелинейных уравнений типа С.Л.Соболева//XII Школа по теории операторов в функц. простр. Тез. докл. Тамбов. 1987. ч.II. С.89.

[41] *Sukacheva T.G.* On a Nonstationary Model of Dinamics of Incompressible Viscoelastic Fluid. Proceed. III ICIAM-95. book of abstracts. Hamburg. 1995. P.454.

[42] *Сукачева Т.Г.* О разрешимости задачи Коши для полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева// Современные методы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики. Тез. докл. ВЗМШ, (г. Воронеж, 25 янв.- февр. 1995 г.). Воронеж. 1995. С.222.

[43] *Сукачева Т.Г.* О разрешимости задачи Коши для полулинейного сингулярного уравнения// XV Школа по теории операторов в функц. простр. Тез. докл. Ульяновск. 1990. ч.II. С.84.

[44] *Сукачева Т.Г.* О разрешимости нестационарной задачи термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости // Матем. моделир. и краевые задачи. Тр. VI межвуз. конф. 29-31 мая 1996 г. Ч.2. Самара. 1996. С.101 — 103.

2-

[45] *Сукачева Т.Г.* О разрешимости нестационарной задачи термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости первого порядка// Соврем. методы теории функций и смежные проблемы. Тез. докл. ВЗМШ (г. Воронеж, 28 января — 4 февраля 1997 г.) Воронеж. 1997. С.156.

[46] *Сукачева Т.Г.* О разрешимости нестационарных задач термоконвекции несжимаемых вязкоупругих жидкостей// Успехи матем. наук. 1998. Т.53, №4. С. 177.

[47] *Сукачева Т.Г., Матвеева О.П.* Задача термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка// "Алгоритмический анализ некорректных задач". Тезисы докладов Всероссийской конференции, посвященной памяти В.К.Иванова. 2-6 февраля 1998 г. Екатеринбург. 1998. С. 248-249.

[48] *Сукачева Т.Г., Матвеева О.П.* Квазистационарные полутраектории в нестационарной модели термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости// "Современные проблемы математики накануне третьего тысячелетия". Тезисы докладов конференции в рамках форума "Наука, культура и образование России накануне третьего тысячелетия". Челябинск. 1997. С. 27.

[49] *Сукачева Т.Г., Матвеева О.П.* Теория неавтономных уравнений соболевского типа и ее приложения// Математические методы в технике и технологиях. ММТТ-12. Сборник трудов международной конференции. 1999. Великий Новгород. Т.1. С.64.

[50] *Сукачева Т.Г., Антонова А.Ю., Даугавет М.Н., Ефимова Ю.А.* Линеаризованные системы Осколкова // Математика в вузе. Современные интеллектуальные технологии. Материалы международной научно-методической конференции. Великий Новгород. 2000. С.178.

Лицензия ЛР №020815 от 21.09.98.
Издательско –полиграфический центр Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого. 173003. Великий Новгород, ул.Б.С.-Петербургская. 41.
Подписано в печать 12.10.2001г. Зак. № 745. Уч.-изд.л. 2.
Формат 60x84/16. Тираж 100 экз. Заказ № 731.
Отпечатано ЗАО «Новгородский Технопарк». Лиц. ПЛД № 56-39.
173003, Великий Новгород, ул.Б.С.-Петербургская, 41. Тел. (816 22) 2 78 83.